

Modelo Hierárquico Robusto para o Risco Coletivo sobre abordagem Bayesiano

Pamela Chiroque e Fernando Moura

IV Congresso Latinoamericano de Estadística Bayesiana

Universidade Federal do Rio de Janeiro
IM-DME

2 de julho de 2015

Conteúdo

- Objetivo do trabalho

Conteúdo

- Objetivo do trabalho
- Modelo de Risco Coletivo (MRC)

Conteúdo

- Objetivo do trabalho
- Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- MRC sob abordagem Bayesiana

Conteúdo

- Objetivo do trabalho
- Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- MRC sob abordagem Bayesiana
- MHRC Propostas: Incorporando robustez

Conteúdo

- Objetivo do trabalho
- Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- MRC sob abordagem Bayesiana
- MHRC Propostas: Incorporando robustez
- Escolha das distribuições a priori

Conteúdo

- Objetivo do trabalho
- Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- MRC sob abordagem Bayesiana
- MHRC Propostas: Incorporando robustez
- Escolha das distribuições a priori
- Descrição do conjunto de dados: Estudo simulado, Aplicação a dados reais

Conteúdo

- Objetivo do trabalho
- Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- MRC sob abordagem Bayesiana
- MHRC Propostas: Incorporando robustez
- Escolha das distribuições a priori
- Descrição do conjunto de dados: Estudo simulado, Aplicação a dados reais
- Comparação de modelos

Conteúdo

- Objetivo do trabalho
- Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- MRC sob abordagem Bayesiana
- MHRC Propostas: Incorporando robustez
- Escolha das distribuições a priori
- Descrição do conjunto de dados: Estudo simulado, Aplicação a dados reais
- Comparação de modelos
- Conclusões e trabalhos futuros

Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez
- 5 Escolha das distribuições a priori
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados
 - Estudo simulado
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos
- 8 Conclusões
- 9 Trabalhos futuros

Objetivo

Objetivo: Prever gasto por indenização de sinistros por pessoa

Obter uma estimativa robusta do prêmio puro que considere sobredispersão sob abordagem Bayesiana. A partir dessa estimativa, prever o prêmio puro para cada classe de risco a em um tempo $T + H$.

Onde H é o horizonte de tempo planejado para previsão, sendo conhecidos, até o tempo t para classe risco $a = 1, \dots, A$.

Objetivo

Problema: Conhecer o processo de produção de sinistros. Modelar o

- $n_{a,t+h}, x_{a,t+h}$: número e o valor dos sinistros no tempo $t + h$.
- Supondo a presença de dados discordantes no $x_{a,t+h}$: valor dos sinistros.

Onde $h = 1, \dots, H$, e H é o horizonte de tempo planejado para previsão, sendo conhecidos, até o tempo t para classe risco $a = 1, \dots, A$.

Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez
- 5 Escolha das distribuições a priori
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados
 - Estudo simulado
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos
- 8 Conclusões
- 9 Trabalhos futuros

Modelo de Risco Coletivo (MRC)- Lundberg(1903)

Proceso Cramer-Lundberg(1930)

[Embrechts et al.(1997)Embrechts, Kluppelberg e Mikosch]

Sejam $(N_{a,t}, X_{a,t})$, respectivamente, o número de sinistros e o total do valor de sinistros produzido por uma carteira de apólices de seguro em um determinado período de tempo $t = 1, \dots, T$ para a classe de risco $a = 1, \dots, A$

$$X_{a,t} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N_{a,t}} Z_{a,t,j}, & \text{se } N_{a,t} > 0, \\ 0, & \text{se } N_{a,t} = 0 \end{cases}$$

Onde $Z_{a,t,j}$ é o valor do sinistro no j -ésimo contrato no tempo t para uma classe de risco a .

Modelo de Risco Coletivo (MRC) composto

Suposições do processo de Cramer-Lundberg (1930)

- i) O número de sinistros no intervalo $(t - 1, t)$ é uma variável aleatória denotada por $N_{a,t}$.

Modelo de Risco Coletivo (MRC) composto

Suposições do processo de Cramer-Lundberg (1930)

- i) O número de sinistros no intervalo $(t - 1, t)$ é uma variável aleatória denotada por $N_{a,t}$.
- ii) O valor dos sinistros $X_{a,t} > 0$, condicionado a $N_{a,t} = n_{a,t}$, $j = 1, \dots, n_{a,t}$, são variáveis aleatórias positivas, independentes e identicamente distribuídas com média $E[X_{a,t}]$ e variância $\text{var}(X_{a,t}) < \infty$; finitas.

Modelo de Risco Coletivo (MRC) composto

Suposições do processo de Cramer-Lundberg (1930)

- i) O número de sinistros no intervalo $(t - 1, t)$ é uma variável aleatória denotada por $N_{a,t}$.
- ii) O valor dos sinistros $X_{a,t} > 0$, condicionado a $N_{a,t} = n_{a,t}$, $j = 1, \dots, n_{a,t}$, são variáveis aleatórias positivas, independentes e identicamente distribuídas com média $E[X_{a,t}]$ e variância $\text{var}(X_{a,t}) < \infty$; finitas.
- iii) Os tempos de ocorrências dos sinistro são instantes aleatórios em que $t_{1,a} \leq t_{2,a} \leq \dots$ e os tempos entre as ocorrências dos mesmos, dados por $T_{k,a} = t_{k,a} - t_{k-1,a}$, são variáveis aleatórias supostamente independentes e exponencialmente distribuídas com media $E[T_{k,a}] = \lambda_a^{-1}$.

Modelo de Risco Coletivo (MRC) composto

Suposições do processo de Cramer-Lundberg (1930)

- i) O número de sinistros no intervalo $(t - 1, t)$ é uma variável aleatória denotada por $N_{a,t}$.
 - ii) O valor dos sinistros $X_{a,t} > 0$, condicionado a $N_{a,t} = n_{a,t}$, $j = 1, \dots, n_{a,t}$, são variáveis aleatórias positivas, independentes e identicamente distribuídas com média $E[X_{a,t}]$ e variância $\text{var}(X_{a,t}) < \infty$; finitas.
 - iii) Os tempos de ocorrências dos sinistro são instantes aleatórios em que $t_{1,a} \leq t_{2,a} \leq \dots$ e os tempos entre as ocorrências dos mesmos, dados por $T_{k,a} = t_{k,a} - t_{k-1,a}$, são variáveis aleatórias supostamente independentes e exponencialmente distribuídas com media $E[T_{k,a}] = \lambda_a^{-1}$.
- Assumindo T_k e X_k são condic. indep. e se as condições acima são satisf. $N_{a,t}$ é um processo de Poisson com taxa λ_a

Modelo de Risco Coletivo (MRC) composto

Modelo de Risco Coletivo

Se $Z_{a,t,j} \sim Ga(k_a, \theta_a)$, $k_a > 0$,

$$N_{a,t} \mid \lambda_a, \pi_{a,t} \sim Po(\lambda_a \pi_{a,t}), \lambda_a > 0,$$

$$X_{a,t} \mid n_{a,t}, \theta_a \sim Ga(k_{a,t}, \theta_a), \theta_a > 0,$$

Onde, $n_{a,t}$ é o número observado de sinistros no tempo t para a classe de risco a , $k_{a,t} = n_{a,t} k_a$, e $\pi_{a,t}$, é a população segurada no tempo t para uma classe de risco a .

Inferência Bayesiana no Modelo de Risco Coletivo(MRC)

Prêmio Puro para várias classes de risco é predito para o tempo $T + H$ considerando-se

Modelo Hierárquico integrando as informações das classes de risco:

- Número e Valor do sinistro, conhecido até o tempo t
- Tamanho da População Exposta ao Risco, considerado conhecido

Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez
- 5 Escolha das distribuições a priori
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados
 - Estudo simulado
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos
- 8 Conclusões
- 9 Trabalhos futuros

Modelo Hierárquico de Risco Coletivo (MHRC) sob abordagem Bayesiana

Modelo Hierárquico de Risco Coletivo em três estágios, [Migon e Moura(2005)] (MHRC-GP)

Primeiro Nível: Distribuições descrevendo o número de sinistros, valor do sinistros. Com a evolução da população assegurada como um modelo de crescimento exponencial, com função resposta media definida $\mu_{a,t}$: 

Modelo Hierárquico de Risco Coletivo (MHRC) sob abordagem Bayesiana

Modelo Hierárquico de Risco Coletivo em três estágios, [Migon e Moura(2005)] (MHRC-GP)

Primeiro Nível: Distribuições descrevendo o número de sinistros, valor do sinistros. Com a evolução da população assegurada como um modelo de crescimento exponencial, com função resposta media definida $\mu_{a,t}$: 

MHRC-GP

$$X_{a,t} | n_{a,t}, \theta_a \sim Ga(n_{a,t}k_a, \theta_a), \quad \theta_a > 0, k_a > 0, \quad (1)$$

$$N_{a,t} | \lambda_a, \pi_{a,t} \sim Po(\pi_{a,t}\lambda_a), \quad \lambda_a > 0$$

$$\Pi_{at} | \beta_a, \tau_\pi \sim \text{LogNormal}[\mu_{a,t}, \tau_\pi^{-1}], \quad \tau_\pi > 0,$$

onde: $\mu_{a,t} = [\beta_{a,0} + \beta_{a,1} \exp(\beta_{a,2}t)] - 0.5\tau_\pi^{-1}$, com

$$\beta_a = (\beta_{a,0}, \beta_{a,1}, \beta_{a,2})', \quad \beta_{a,i} \in R, i = 0, 1, 2$$

Modelo Hierárquico de Risco Coletivo (MHRC) sob abordagem Bayesiana

Parâmetros associados à distribuição dos valores e números de sinistros

Segundo Nível: Hierarquia nas classes de risco-faixas etárias

$$\lambda_a \mid \lambda, \eta \sim Ga(\lambda, \eta), \quad \lambda_a > 0$$

$$\theta_a \mid \theta, \delta \sim Ga(\theta, \delta), \quad \theta_a > 0$$

$$\kappa_a \mid \phi, \psi \sim Ga(\phi, \psi), \quad \kappa_a > 0$$

Modelo Hierárquico de Risco Coletivo (MHRC) sob abordagem Bayesiana

Parâmetros associados à distribuição da população exposta ao risco

Segundo Nível: Hierarquia nas classes de risco-faixas etárias

$$\begin{aligned}\beta_a | \beta, \Upsilon &\sim N[\beta, \Upsilon], \\ \beta &= (m_0, m_1, C)', \\ \Upsilon &= \text{diag}(v_0, v_1, V),\end{aligned}$$

com m_0, m_1, v_0 e v_1 constantes conhecidas .

Os parâmetros relacionados com a evolução da população foram escolhidos de tal forma que a população em risco tenda-se a estabelecer quando o tempo aumenta.

Modelo Hierárquico de Risco Coletivo (MHRC) sob abordagem Bayesiana

Terceiro Nível: Distribuições a Priori dos parâmetros

- (i) $\lambda, \eta, \theta, \delta, \kappa$ and ϕ seguem genericamente uma distribuição Gama com parâmetros conhecidos a_ψ e b_ψ e
- (ii) C e V Normal e Gama, respectivamente, com parâmetros conhecidos m_2, M_2, n, D .

$$\psi \sim Ga(a_\psi, b_\psi), \quad \psi > 0$$

$$C \sim N(m_2, M_2^{-1}), \quad C \in R,$$

$$V \sim Ga(n, D), \quad V > 0$$

Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez**
- 5 Escolha das distribuições a priori
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados
 - Estudo simulado
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos
- 8 Conclusões
- 9 Trabalhos futuros

MHRC Robusto sob abordagem Bayesiana

Modificações sobre o modelo (MHRC-GP) (1), [Migon e Moura(2005)].

Robustificar: valor dos sinistros

$$X_{a,t} \mid n_{a,t}, \theta_a, \kappa_a, \nu_a \sim \text{LogT}(\mu_{X_{a,t}}, \sigma_{X_{a,t}}^2, \nu_a),$$

com $X_{a,t} > 0$, $\mu_{X_{a,t}} \in R$, $\sigma_{X_{a,t}}^2 > 0$, $\nu_a > 0$, onde $\mu_{X_{a,t}}$, $\sigma_{X_{a,t}}^2$, ν_a , respectivamente denotam os parâmetros de localização, escala e o grau de liberdade da distribuição logT-student.

MHRC Robusto sob abordagem Bayesiana

Modificações sobre o modelo (MHRC-GP) (1), [Migon e Moura(2005)].

Robustificar: valor dos sinistros

$$X_{a,t} \mid n_{a,t}, \theta_a, \kappa_a, \nu_a \sim \text{LogT}(\mu_{X_{a,t}}, \sigma_{X_{a,t}}^2, \nu_a),$$

com $X_{a,t} > 0$, $\mu_{X_{a,t}} \in R$, $\sigma_{X_{a,t}}^2 > 0$, $\nu_a > 0$, onde $\mu_{X_{a,t}}$, $\sigma_{X_{a,t}}^2$, ν_a , respectivamente denotam os parâmetros de localização, escala e o grau de liberdade da distribuição logT-student.

parâmetros

$$\mu_{X_{a,t}} = \log\left(\frac{n_{a,t}\kappa_a}{\theta_a}\right) - \frac{1}{2}\sigma_{X_{a,t}}^2, \quad \sigma_{X_{a,t}}^2 = \log\left(\frac{1}{n_{a,t}\kappa_a} + 1\right) \quad (2)$$

Resumo dos modelos MHRC Robusto sob abordagem Bayesiana

Para um determinado período de tempo $t = 1, \dots, T$ para a classe de risco $a = 1, \dots, A$

Tabela: Distribuições propostas: valor dos sinistro

MHRC	Robustez
	$X_{a,t} \mid \mu_{a,t}, \sigma_{a,t}^2, \nu_a$
GP	$G(n_{a,t} \kappa_a, \theta_a)$
NP	$\log N(\mu_{a,t}, \sigma_{a,t}^2)$
TP	$\log T(\mu_{a,t}, \sigma_{a,t}^2, \nu_a)$

Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez
- 5 Escolha das distribuições a priori**
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados
 - Estudo simulado
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos
- 8 Conclusões
- 9 Trabalhos futuros

Escolha das distribuições a priori: ν_a, θ_a no MHRCR_{valor} sinistros

Considere: $\kappa_a = 1$, assume-se $\theta_a \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$. Considere-se as seguintes prioris, para o grau de liberdade $\nu_a, a = 1, \dots, A$

Escolha das distribuições a priori: ν_a, θ_a no MHRCR_{valor} sinistros

Considere: $\kappa_a = 1$, assume-se $\theta_a \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$. Considere-se as seguintes priors, para o grau de liberdade $\nu_a, a = 1, \dots, A$

A priori Jeffreys independente -MHRCR

$$\pi^{Jind}(\nu_a) \propto \left(\left[\psi' \left(\frac{\nu_a}{2} \right) - \psi' \left(\frac{\nu_a+1}{2} \right) - \frac{2(5+\nu_a)}{\nu_a(3+\nu_a)(1+\nu_a)} \right] \right)^{\frac{p}{2}},$$

Escolha das distribuições a priori: ν_a, θ_a no MHRCR, valor sinistros

Considere: $\kappa_a = 1$, assume-se $\theta_a \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$. Considere-se as seguintes priors, para o grau de liberdade ν_a , $a = 1, \dots, A$

A priori Jeffreys independente -MHRCR

$$\pi^{Jind}(\nu_a) \propto \left(\left[\psi' \left(\frac{\nu_a}{2} \right) - \psi' \left(\frac{\nu_a+1}{2} \right) - \frac{2(5+\nu_a)}{\nu_a(3+\nu_a)(1+\nu_a)} \right] \right)^{\frac{p}{2}},$$

A priori conjunta de Jeffreys -MHRCR

$$\pi^{Jcj}(\nu_a, \theta_a) \propto \left(\frac{5+\nu_a}{\theta_a^2(3+\nu_a)} \right)^{\frac{p}{2}} \times \left(\frac{1}{4} \left[\psi' \left(\frac{\nu_a}{2} \right) - \psi' \left(\frac{\nu_a+1}{2} \right) - \frac{2(5+\nu_a)}{\nu_a(3+\nu_a)(1+\nu_a)} \right] \right)^{\frac{p}{2}},$$

Escolha das distribuições a priori: ν_a, θ_a no MHRCR_{valor} sinistros

Considere: $\kappa_a = 1$, assume-se $\theta_a \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$. Considere-se as seguintes prioris, para o grau de liberdade ν_a , $a = 1, \dots, A$

A priori Jeffreys independente -MHRCR

$$\pi^{Jind}(\nu_a) \propto \left(\left[\psi' \left(\frac{\nu_a}{2} \right) - \psi' \left(\frac{\nu_a+1}{2} \right) - \frac{2(5+\nu_a)}{\nu_a(3+\nu_a)(1+\nu_a)} \right] \right)^{\frac{p}{2}},$$

A priori conjunta de Jeffreys -MHRCR

$$\pi^{Jcj}(\nu_a, \theta_a) \propto \left(\frac{5+\nu_a}{\theta_a^2(3+\nu_a)} \right)^{\frac{p}{2}} \times \left(\frac{1}{4} \left[\psi' \left(\frac{\nu_a}{2} \right) - \psi' \left(\frac{\nu_a+1}{2} \right) - \frac{2(5+\nu_a)}{\nu_a(3+\nu_a)(1+\nu_a)} \right] \right)^{\frac{p}{2}},$$

[Fonseca et al.(2008)Fonseca, Ferreira e Migon] MRegres

$$\pi^{Jrg}(\nu_a) \propto \left(\frac{\nu_a}{3+\nu_a} \right)^{\frac{p}{2}} \times \left(\left[\psi' \left(\frac{\nu_a}{2} \right) - \psi' \left(\frac{\nu_a+1}{2} \right) - \frac{2(3+\nu_a)}{\nu_a(1+\nu_a)^2} \right] \right)^{\frac{p}{2}}$$

Estudo de simulação: Distribuição condicional completa:

θ_a, ν_a , no MHRCR

Dados artificias, segundo o modelo M3 TP foram gerados, isto é:

MHRC-TP

$$\begin{aligned} Y_{a,t} \mid n_{a,t}, \mu_{X_{a,t}}, \sigma_{X_{a,t}}^2, \nu_a &\sim T(\mu_{X_{a,t}}, \sigma_{X_{a,t}}^2, \nu_a), \\ N_{a,t} \mid \lambda_a, \pi_{a,t} &\sim P(\lambda_a \pi_{a,t}) \end{aligned} \quad (3)$$

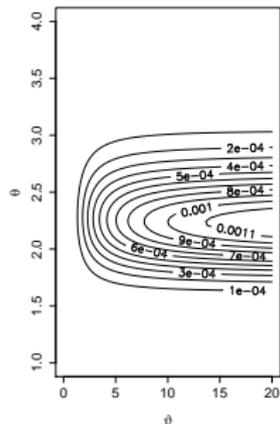
Com $Y_{a,t} = \log(X_{a,t})$, $\mu_{a,t} \in R$, $\sigma_{a,t}^2, \nu_a > 0$, $\lambda_a > 0$. Os parâmetros $\mu_{a,t}, \sigma_{a,t}^2$ segundo (2).

Além disso, considere

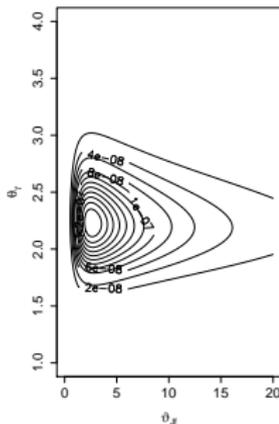
$T = 12$, $a = 1$, $\pi_{a=1,t} = 1$, e $t = 1, \dots, 12$; $\lambda = 5$, $\theta = 8$, $\nu = 5$

Distribuição condicional completa: θ_a, ν_a , no MHRCR

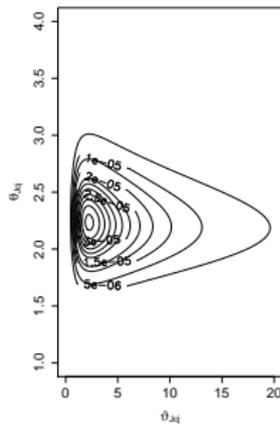
Figura: Curvas de nível para Log verossimilhança, condicional completa dos parâmetros θ_a e ν_a



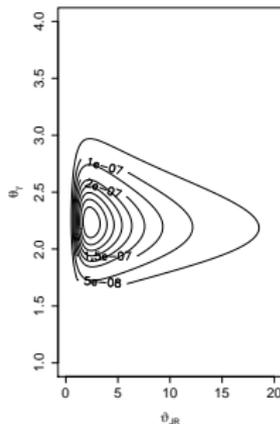
$$L(\nu, \theta | x_{a,t}, n_{a,t})$$



$$Vr \times \pi^{Jf}(\nu_a, \theta_a)$$



$$Vr \times \pi^{Jcj}(\nu_a, \theta_a)$$



$$Vr \times \pi^{Jind}(\nu_a, \theta_a)$$

Avaliação do Prêmio em um MHRC sob. abordagem Bayesiana

$X_{a,T+H}$: Distribuição preditiva do valor dos sinistros

O total do valor dos sinistros e a população assegurada para classe de risco a para um horizonte de tempo futuro H :

$$X_{a,T+H} = \sum_{t=T+1}^{T+H} X_{a,t}, \quad \Pi_{a,T+H} = \sum_{t=T+1}^{T+H} \Pi_{a,t}$$

$R_{a,T+H}$: Distribuição preditiva do gasto por pessoa

O gasto da companhia para cada pessoa segurada é denotada por:

$$R_{a,T+H} = \frac{X_{a,T+H}}{\Pi_{a,T+H}}$$

Avaliação do Prêmio em um MHRC sob. abordagem Bayesiana

O cálculo do prêmio para cada classe de risco a é dado por o percentil 95th da distribuição preditiva $R_{a,T+H}$, a qual define o gasto por pessoa e é dada por:

$$p(R_{a,T+H} | D_T) = \int_{\Theta} p(R_{a,T+H} | \Theta) p(\Theta | D_T) d\Theta,$$

Decisão ótima δ

Que o valor 95% da distribuição preditiva é resultado da teoria de decisão Bayesiana. Isto é o valor 95% da distribuição preditiva é a decisão ótima δ que maximiza a função utilidade desvio absoluto modificado.

Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez
- 5 Escolha das distribuições a priori
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados**
 - Estudo simulado
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos
- 8 Conclusões
- 9 Trabalhos futuros

Descrição do conjunto de dados

Conjunto de Dados

Extraído de um plano de saúde implementado no Nordeste do Brasil. Observações mensais $t = 1, \dots, 12$ meses por faixa etária $a = 1, \dots, 7$: grupos de idade: $[0 - 17)$, $[17 - 30)$, $[30 - 40)$, $[40 - 50)$, $[50 - 60)$, $[60 - 70)$, $[70, +)$.

A informação está dividida em: valores de consultas, diagnósticos e internações, os quais serão denominados serviços 1, 2 e 3, respectivamente. Para cada serviço, classe de idade a e período de tempo t , se denota:

Descrição do conjunto de dados

Conjunto de Dados

Extraído de um plano de saúde implementado no Nordeste do Brasil. Observações mensais $t = 1, \dots, 12$ meses por faixa etária $a = 1, \dots, 7$: grupos de idade: $[0 - 17)$, $[17 - 30)$, $[30 - 40)$, $[40 - 50)$, $[50 - 60)$, $[60 - 70)$, $[70, +)$.

A informação está dividida em: valores de consultas, diagnósticos e internações, os quais serão denominados serviços 1, 2 e 3, respectivamente. Para cada serviço, classe de idade a e período de tempo t , se denota:

- $\pi_{a,t}$, o número de segurados para cada tempo t e faixa etária a assumido conhecido.
- $n_{a,t}, X_{a,t}$, é o número e valor dos sinistros em uma classe de idade a e período de tempo t respectivamente.

Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez
- 5 Escolha das distribuições a priori
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados**
 - **Estudo simulado**
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos
- 8 Conclusões
- 9 Trabalhos futuros

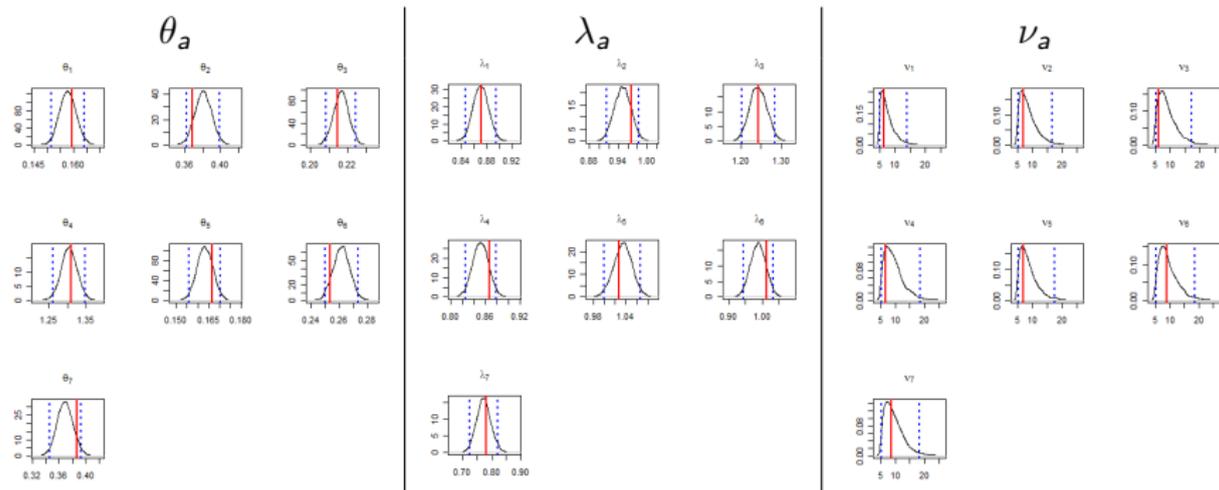
Estudo simulado

Cenário : MHRC-TP

Envolve os modelos cuja distribuição do número de sinistros é dada pela a distribuição **Poisson**, isto é MHRC: **GP, NP, TP**. Os parâmetros envolvidos são $\Theta_a^1 = \{\theta_a, \lambda_a^P, \nu_a\}$

Cenário : MHRC-TP

Figura: Curva de densidade, verdadeiro valor do parâmetro (linha cheia) e intervalo de 95% de credibilidade (linha pontilhada), a posteriori para os parâmetros, para o serviço 1 no MHRC-TP

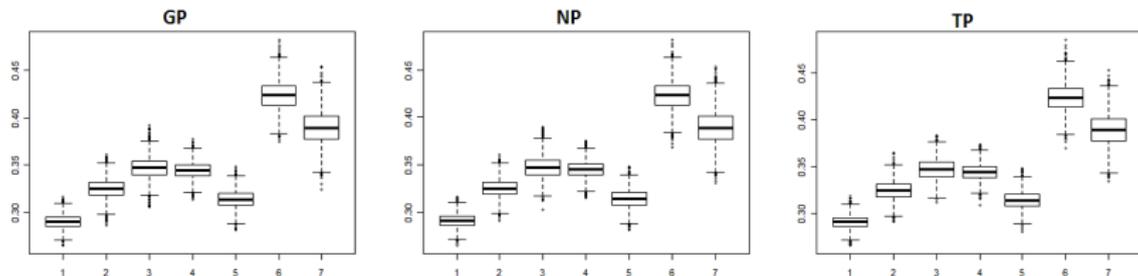


Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez
- 5 Escolha das distribuições a priori
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados**
 - Estudo simulado
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos
- 8 Conclusões
- 9 Trabalhos futuros

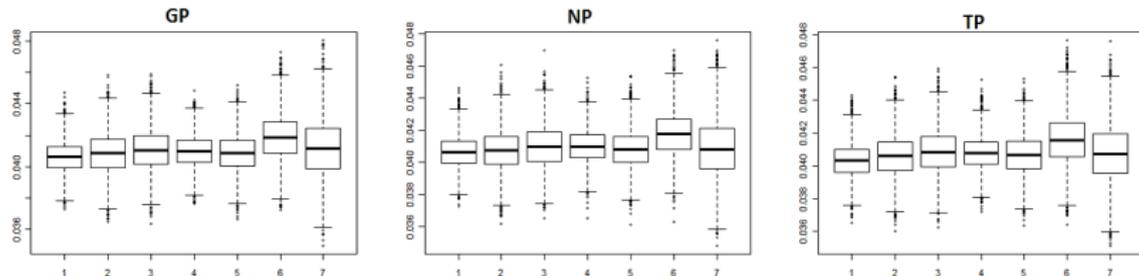
Um plano de seguro de saúde, Distribuição a posteriori de λ_a

Figura: *Boxplot das distribuições a posteriori para o parâmetro λ_a no serviço 1 por classe de idade*



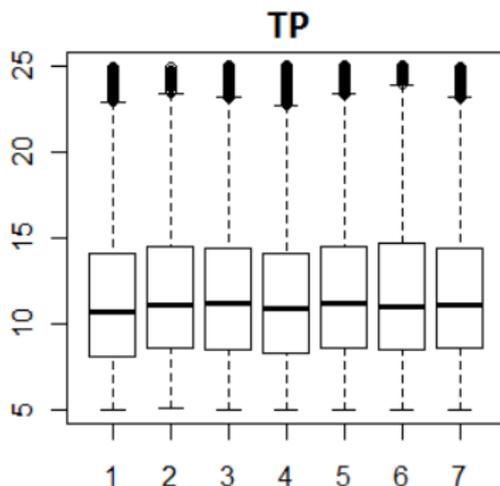
Um plano de seguro de saúde, Distribuição a posteriori de θ_a

Figura: *Boxplot das distribuições a posteriori para o parâmetro θ_a no serviço 1 por classe de idade*



Um plano de seguro de saúde, Distribuição a posteriori de ν_a

Figura: *Boxplot das distribuições a posteriori para o parâmetro ν_a no serviço 1 por classe de idade.*



Análise da presença de dados discordantes

Mistura Log Normal - Gama

$X_{a,t}$ é o resultado da mistura Log Normal (Ln) - Gama (G), onde $\phi_{a,t}$ pode ser visto como a precisão na observação (a, t) , isto é:

$$Lt(x_{a,t} | \theta_a, \kappa_a, \nu_a) = \int_0^{\infty+} Ln(x_{a,t} | n_{a,t}, \phi_{a,t}, \theta_a, \kappa_a) G(\phi_{a,t} | \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}) d\phi_{a,t}$$

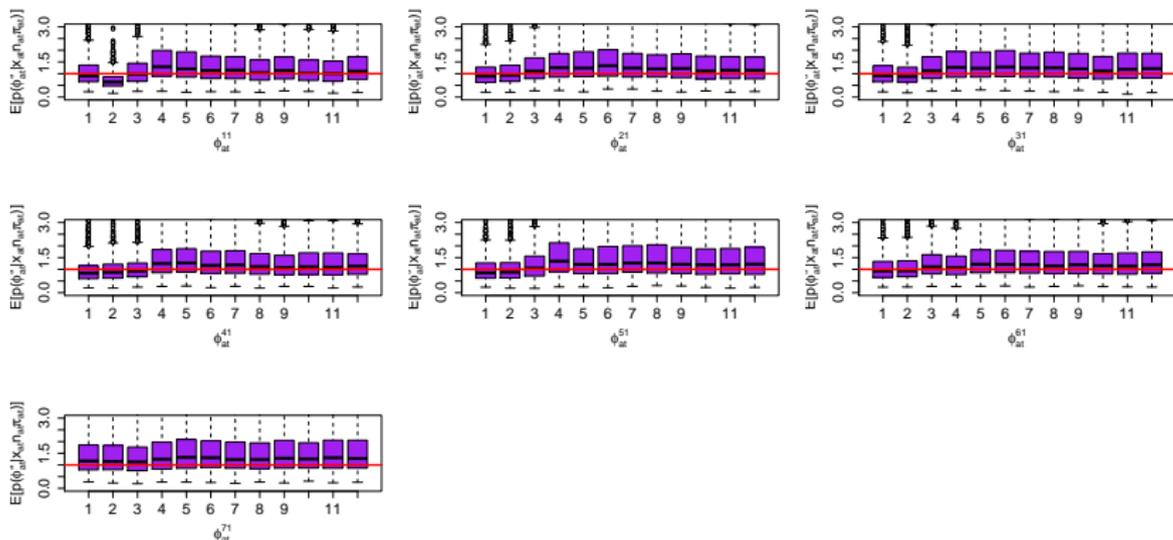
Distribuição a posteriori de $\phi_{a,t}$

$$\phi_{a,t} | x_{a,t}, \sim G\left(\frac{\nu_a + 1}{2}, \frac{(\frac{\log(X_{a,t}) - \mu_{a,t}}{\sigma_{a,t}})^2 + \nu_a}{2}\right).$$

Em particular esperamos que os valores das **médias a posteriori** para cada observação encontram-se **em torno de 1**.

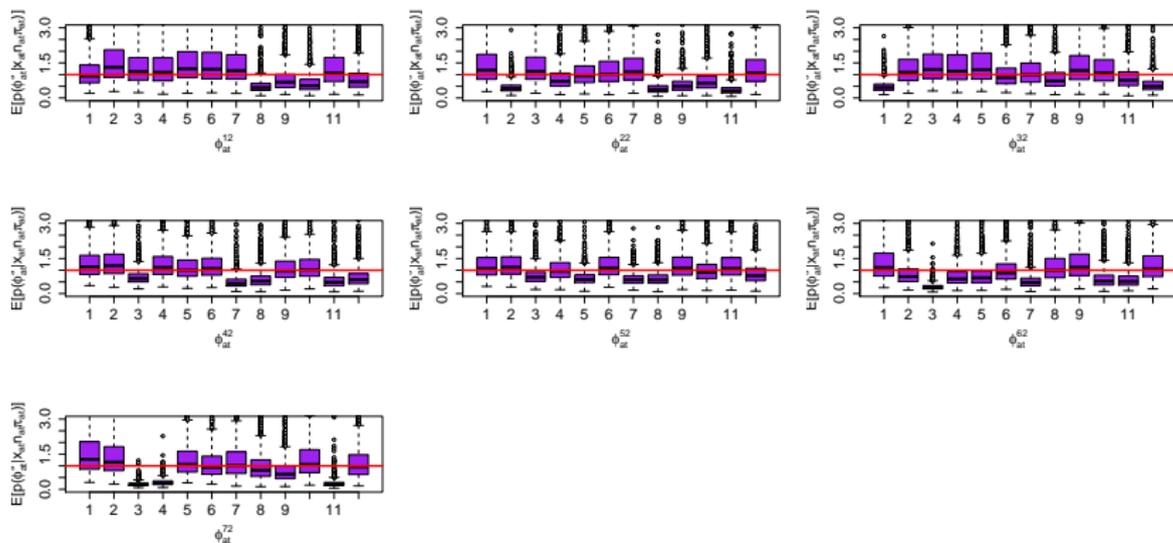
$\phi_{a,t}^s \mid x_{a,t}$ para cada observação a, t no serviço 1.

Figura: Boxplot da distribuição a posteriori do parâmetro ϕ para cada classe a no tempo t no *serviço 1*



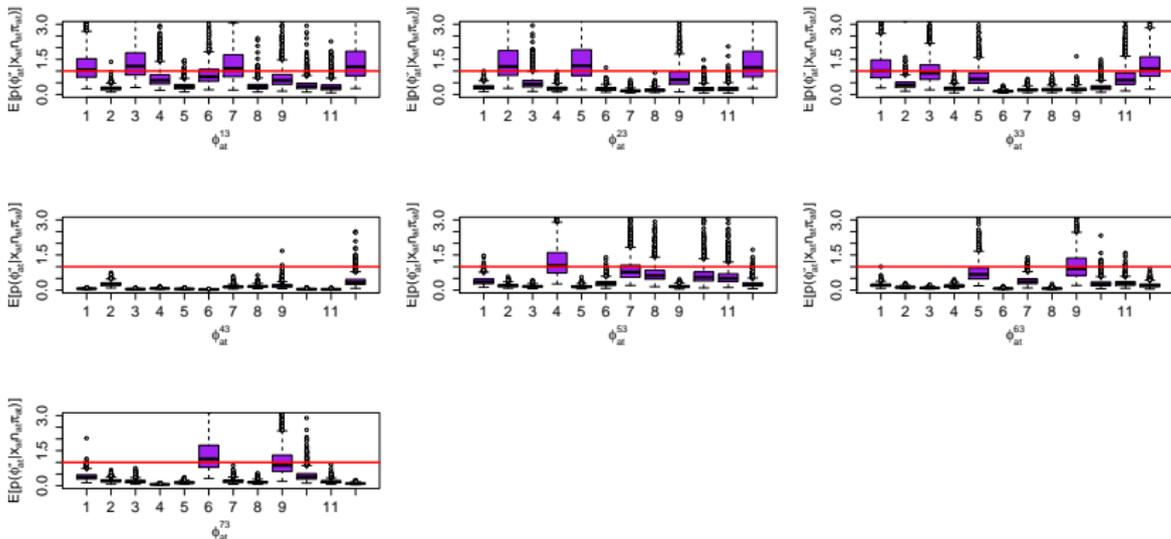
$\phi_{a,t}^s \mid x_{a,t}$ para cada observação a, t no serviço 2.

Figura: Boxplot da distribuição a posteriori do parâmetro ϕ para cada classe a no tempo t no serviço 2



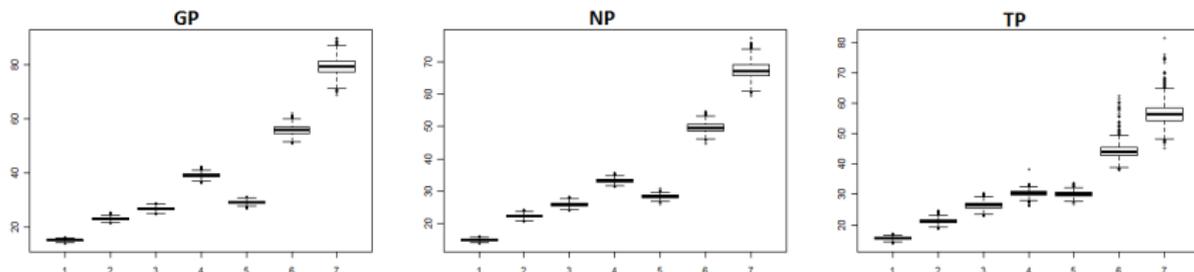
$\phi_{a,t}^s \mid x_{a,t}$ para cada observação a, t no serviço 3.

Figura: Boxplot da distribuição a posteriori do parâmetro ϕ para cada classe a no tempo t no **serviço 3**



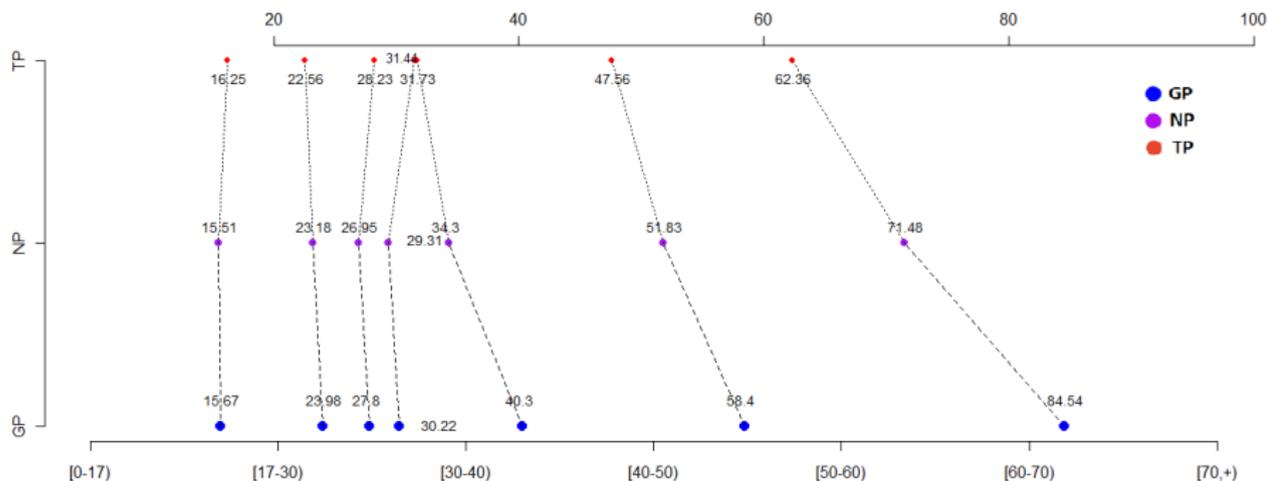
Aplicação em um plano de seguro de saúde, $R_{a,T+H}$: gastos por indenização de sinistros por pessoa

Figura: *Boxplot das distribuições preditivas: $R_{a,T+H}$ nos modelos ajustados segundo classe de idade*



Aplicação em um plano de seguro de saúde, Cenário : encolhimento das estimativas do prêmio

Figura: Gráfico de encolhimento dos valores do prêmio para os modelos propostos. Os valores dos sinistros seguindo: **Gama**, **Normal**, **T-st**, respectivamente



Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez
- 5 Escolha das distribuições a priori
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados
 - Estudo simulado
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos**
- 8 Conclusões
- 9 Trabalhos futuros

Critérios de comparação: DIC, CRPS, EQMp, EAMp para os modelos ajustados

Tabela: Valores de *DIC*, *CRPS*, *EQMp*, *EAMp* para os modelos ajustados

Md	D.bar	D.est	DIC	CRPS	EQMp	EAMp
GP	10420.14	10378.410	10461.860	0.491	0.871	0.573
NP	8172.317	8130.900	8213.733	0.465	0.758	0.546
TP	6077.799	6036.067	6119.53	0.454	0.701	0.540

Aplicação em um plano de seguro de saúde, Estimativas do Prêmio

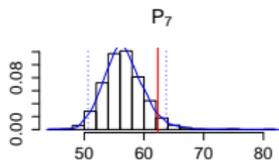
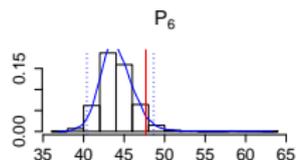
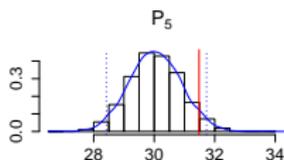
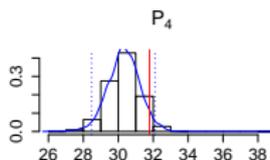
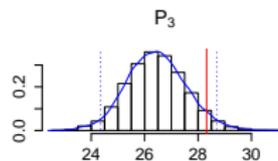
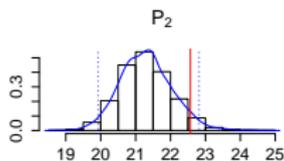
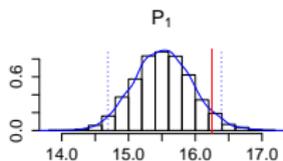
Tabela: *Estimativas do Prêmio*, considerando a população conhecida para os modelos ajustados

M	0 – 17	17 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70+
GP	15.67	23.98	27.80	40.30	30.22	58.40	84.54
NP	15.51	23.18	26.95	34.30	29.31	51.83	71.48
TP	16.25	22.56	28.23	31.73	31.44	47.56	62.36

Aplicação em um plano de seguro de saúde, Distribuição do

gasto por pessoa do modelo escolhido: MHRC-TP

Figura: **Histograma, intervalo de 95% de credibilidade (linha pontilhada) e o valor do prêmio (linha cheia)** por classe de idade do modelo escolhido: MHRC-TP



Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez
- 5 Escolha das distribuições a priori
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados
 - Estudo simulado
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos
- 8 **Conclusões**
- 9 Trabalhos futuros

Conclusões

Principais conclusões

- Os **critérios de seleção** do modelo adotado neste trabalho é aquele que **prioriza a qualidade das predições**.

Conclusões

Principais conclusões

- Os **critérios de seleção** do modelo adotado neste trabalho é aquele que **prioriza a qualidade das predições**.
- O critério CRPS e DIC sugerem que o modelo hierárquico de risco coletivo **Log T-student e Poison** é o mais adequado para fazer previsão do prêmio.

Conclusões

Principais conclusões

- Em relação aos dados, foi verificado que o **serviço 3** apresenta a **maior quantidade de valores discrepantes** e além disso **é mais disperso**.

Conclusões

Principais conclusões

- Em relação aos dados, foi verificado que o **serviço 3** apresenta a **maior quantidade de valores discrepantes** e além disso **é mais disperso**.
- O **encolhimento do valor de prêmio** é devido à distribuição associada aos valores dos sinistros.

Conclusões

Principais conclusões

- Em relação aos dados, foi verificado que o **serviço 3** apresenta a **maior quantidade de valores discrepantes** e além disso **é mais disperso**.
- O **encolhimento do valor de prêmio** é devido à distribuição associada aos valores dos sinistros.
- A modelagem dos valores dos sinistros considerando a distribuição **Log T-student**, é o único que **apresenta consistência no crescimento na tendência** da distribuição $R_{a,T+H}$ segundo as faixas etárias.

Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Modelo de Risco Coletivo (MRC)
- 3 Modelos de risco Coletivo sob abordagem Bayesiana
- 4 MHRC Proposto: Com robustez
- 5 Escolha das distribuições a priori
 - Distribuição a priori de Jeffreys para ν, θ : valor do sinistro
- 6 Descrição do conjunto de dados
 - Estudo simulado
 - Aplicação a dados reais
- 7 Comparação de modelos
- 8 Conclusões
- 9 Trabalhos futuros

Trabalhos futuros

- Analisar uma possível sobredispersão nos dados.

Trabalhos futuros

- Analisar uma possível sobredispersão nos dados.
- Considerar um modelo que **relacione as despesas e a idade do beneficiário**.

Trabalhos futuros

- Analisar uma possível sobredispersão nos dados.
- Considerar um modelo que **relacione as despesas e a idade do beneficiário**.
- Propor distribuições **Birnbaum Saunder-T e Gaussiana inversa**, para modelar os valores dos sinistros.

Trabalhos futuros

- Analisar uma possível sobredispersão nos dados.
- Considerar um modelo que relacione as despesas e a idade do beneficiário.
- Propor distribuições Birnbaum Saunder-T e Gaussiana inversa, para modelar os valores dos sinistros.
- Analisar modelos mais adequados para dados do serviço 3.

Principais Referências

-  Embrechts, P., Kluppelberg, C. e Mikosch, T. (1997) *Loss Models. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*.
-  Fonseca, T., Ferreira, M. e Migon, H. (2008) Objective bayesian analysis for the student-t regression model. *Biometrika*, **95**, 325–333.
-  Migon, H. S. e Moura, F. (2005) Hierarchical bayesian collective risk model: An application to health insurance. *Insurance: Mathematics & Economics*, **36**, 119–135.

Agradecimentos: Apoio Financeiro



Fim

Gracias!